Lycée : Habib Thamer *Classe : 2 ème Science*	**SERIE D' EXERCICES N°(12)** *Trigonométrie*	*A.scolaire :* **2008/2009**

Exercice 1 :

Calculer

$A = \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7}$

$B = \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \cos^2\frac{6\pi}{7}$

$C = \text{tg}\,\frac{\pi}{9} + \text{tg}\,\frac{2\pi}{9} + \text{tg}\,\frac{4\pi}{9} + \text{tg}\,\frac{5\pi}{9} + \text{tg}\,\frac{7\pi}{9} + \text{tg}\,\frac{8\pi}{9}$

Exercice 2 :

1) Soit ABC un triangle
   a) Montrer que $\sin\hat{A} + \sin\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = 2\sin\hat{A}$
   b) Montrer que $\cos\hat{A} + \cos\left(\hat{B}+\hat{C}\right) = 0$
2) Calculer $E = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ et $F = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$
3) Calculer x et y dans le cas $\begin{cases} 2\cos x + \cos y = 2 \\ \cos x - \cos y \end{cases}$
4) Montrer que $\cos^6x + \sin^6x + \cos^4x + \sin^4x + 5\cos^2x\sin^2x = 2$ pour tout $x \in [0, \pi]$

Exercice 3 :

1) Résoudre dans $[0, \pi]$, les équations :
   a) $2\cos^2x - 3\cos x - 2 = 0$
   b) $2\sin^2x - 7\sin x + 3 = 0$
   c) $4\cos^2x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$.
2) Résoudre dans IR l'équation : $x^2 - 2x - \text{tg}^2\alpha = 0$ avec $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 4 :

Soit x et y deux réels de l'intervalles $[0, \pi]$

1) Montrer que si $x + y = \frac{\pi}{2}$ alors $\cos^2x + \cos^2y = 1$ et $\sin^2x + \sin^2y = 1$.
2) Calculer sans calculatrice :
   $A = \cos^2\frac{11\pi}{90} + \cos^2\frac{5\pi}{36} + \cos^2\frac{13\pi}{36} + \cos^2\frac{17\pi}{45}$
   $B = \sin^2\frac{11\pi}{90} + \sin^2\frac{5\pi}{36} + \sin^2\frac{13\pi}{36} + \sin^2\frac{17\pi}{45}$

Exercice 5 :

Soit l'application f : $\begin{array}{l} [0,\pi] \to IR \\ x \mapsto 2\cos^2x + 4\sin x - 3 \end{array}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(\pi - x) = f(x)$
   b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en déduire la valeur de $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
2) Soit α l'élément de $[0, \pi]$ tel que $\text{cotg}\,\alpha = -2\sqrt{2}$. Calculer $f(\alpha)$
3) a) Vérifier que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - 2(\sin x - 1)^2$
   b) Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation $f(4) = \frac{1}{2}$
4) $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan, on donne les points $M(1 - 2\sin x, -\sin x)$ et $N(0, -\sin x)$.
   Montrer que $3ON^2 - OM^2 = f(x)$. Déterminer par leurs coordonnées, les points M et N tel que $3ON^2 - OM^2$ soit maximale.

Exercice 6 :

Soit l'application f : $[0,\pi] \to IR \quad x \mapsto \cos^3x - \sin^3x + 3(\sin x - \cos x)$

1) a) Montrer que $f(x) = (\sin x - \cos x)(2 - \sin x.\cos x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$.
   b) Résoudre dans $[0, \pi]$; l'équation $f(x) = 0$.
2) On pose $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) Calculer f(x) ; b) Calculer sinx et cosx

Exercice 7 :

I/ Soit l'application f : $[0,\pi] \to IR$

$$x \mapsto 3\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 5$$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
2) Résoudre dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation : $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f(x)$
3) Soit x un élément de $[0,\pi]$
   a) Exprimer f(x) à l'aide de cotg x lorsque x $\in$ $]0, \pi[$
   b) En déduire que pour tout x de $[0, \pi]$; $f(x) < 0$.

II/ Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que AB = 4 cm et O le milieu de [BC].

1) a) Placer les points I et J tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

   b) Soit K le point de [OA] tel que IJK est un triangle équilatéral.

   Montrer que $K\hat{I}B = \frac{5\pi}{12}$ et que AK = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$
2) La parallèle à (IK) passant par O coupe la droite (AB) en un point E.
   a) Calculer OE.
   b) En déduire à l'aide de la loi du sinus dans le triangle OEB que $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 8 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 4, AC = $3\sqrt{2}$ et BC = $\sqrt{10}$ et J le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) a) Calculer cos $\hat{A}$ en déduire que $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$

   b) Calculer sin $\hat{B}$ en déduire que AJ = $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

   c) Calculer S : l'aire du triangle ABC.
2) Soit I = $S_{(AC)}$(J). Calculer le périmètre du quadrilatère IAJC.
3) (IJ) coupe (AC) en O. S' : l'aire de IAJC
   a) Montrer que S' = $\frac{1}{2}$ IJ$\times$AC
   b) Calculer alors IJ.

.

Exercice 9 :

Soient [Ox) et [Oy) deux demi-droites tel que $x\hat{O}y = \frac{\pi}{3}$. Placer le point A de [Ox) tel que OA = 4 cm et le point B sur [Oy) tel que OB = 6 cm. Soit H le projeté orthogonal de A sur (OB).

1) Calculer AH, OH et AB.
2) Calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABO.
3) Déduire sin $O\hat{A}B$

Exercice 10:

Soit M le point du demi-cercle trigonométrique défini par $I\hat{O}M = \alpha$ où $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

1) Soit J le symétrique de I par rapport à O et H le projeté orthogonal de M sur (OI).
   a) Montrer que $JM^2 = (1 + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$.
   b) En déduire que : JM = $\sqrt{2+2\cos\alpha}$
2) En utilisant le triangle IJM, établir la relation : $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

Exercice 11 :

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ un R.O.N et ζ le demi cercle trigonométrique de diamètre [AA'] et passant par le point B.

Placer le point M de ζ tel que $A\hat{O}M = \frac{\pi}{4}$.

1) Calculer : AM, A'M
2) En déduire $\sin\frac{\pi}{8}$;$\cos\frac{\pi}{8}$ et tg $\frac{\pi}{8}$